ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

ĐINH THỊ NGỌC ÁNH

ĐA THỨC BERNOULLI VÀ TÂM SỐ (k,l)-LŨY THỪA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

ĐINH THỊ NGỌC ÁNH

ĐA THỨC BERNOULLI VÀ TÂM SỐ (k,l)-LŨY THỪA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, người thân đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Hạ Long, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Đinh Thị Ngọc Ánh

Mở đầu

Cho y, k, l là ba số nguyên dương với $y \geq 4$. Ta nói rằng số nguyên dương x ($\leq y - 2$) là một *tâm số* (k,l)*-lũy thừa* của y nếu

$$1^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l.$$

Khái niệm này được Liptai và các cộng sự [6] tổng quát hóa từ khái niệm tâm số k-lũy thừa của Finkelstein [4]. Cụ thể hơn, trong trường hợp $k = l$, tâm số (k,k)-lũy thừa chính là tâm số k-lũy thừa được định nghĩa bởi Finkelstein. Trong khi đó, khái niệm về tâm số k-lũy thừa được Finkelstein giới thiệu khi nghiên cứu một bài toán thực tế (xem Bài toán 2.1.1). Finkelstein đã chỉ ra rằng có vô số số nguyên dương n có tâm số 1-lũy thừa, trong khi đó không có số nguyên $n > 1$ nào có tâm số 2-lũy thừa. Từ đó, Finkelstein đã đưa ra giả thuyết rằng, nếu $k > 1$ thì không có số nguyên $n > 1$ nào có tâm số k-lũy thừa. Giả thuyết này đã được chứng minh cho trường hợp $k = 3$ bởi Steiner [7] và cho trường hợp $k = 5$ bởi Ingram [5].

Đối với trường hợp tâm số (k,l)-lũy thừa tổng quát, Liptai và các cộng sự đã chỉ ra sự tồn tại hữu hạn các số này trong một số trường hợp cụ thể. Chẳng hạn như, trong trường hợp $k \geq l, l \in \{1,3\}$ và $(k,l) \neq (1,1)$, các tác giả này đã chỉ ra rằng chỉ tồn tại hữu hạn tâm số (k, l)-lũy thừa của một số nguyên $y \geq 4$ cho trước.

Để có được các kết quả nêu trên về tâm số (k, l)-lũy thừa, các tác giả đã sử dụng một số tính chất của đa thức Bernoulli và số Bernoulli.

Mục tiêu của Luận văn là trình bày lại khái niệm về tâm số (k, l)-lũy thừa, một số kết quả của Finkelstein về tâm số k-lũy thừa và một số kết quả của Liptai và các cộng sự về tâm số (k, l)-lũy thừa. Trước khi trình bày các nội dung này, Luận văn trình bày lại khái niệm và một số tính chất về đa thức Bernoulli và số Bernoulli, đặc biệt là một số kết quả về sự phân tích đa thức Bernoulli thành hợp của hai đa thức.

Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1. Số Bernoulli và đa thức Bernoulli. Trong chương này, chúng tôi trình bày lại khái niệm về đa thức Bernoulli, số Bernoulli, đồng thời trình bày lại một số tính chất về đa thức Bernoulli cũng như về số Bernoulli. Phần cuối của chương, chúng tôi trình bày lại một số kết quả của Bilu và các cộng sự [3] về sự phân tích các đa thức Bernoulli thành hợp của hai đa thức.

• Chương 2. Tâm số (k, l)-lũy thừa. Trong chương này, chúng tôi trình bày lại khái niệm về tâm số (k, l)-lũy thừa mà trường hợp đặc biệt là tâm số k-lũy thừa. Trong mục 2.1, chúng tôi trình bày lại chứng minh của Finkelstein chỉ ra rằng tồn tại vô số số nguyên dương n có tâm số 1-lũy thừa nhưng không tồn tại số nguyên $n > 1$ nào có tâm số

2-lũy thừa, đồng thời chúng tôi giới thiệu lại giả thuyết của Finkelstein cũng như sơ lược giới thiệu một số kết quả liên quan đến giả thuyết này. Trong mục 2.2, chúng tôi trình bày lại một số kết quả của Liptai và các cộng sự về tâm số (k, l)-lũy thừa.

Chương 1

Đa thức Bernoulli và số Bernoulli

Trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm đa thức Bernoulli, số Bernoulli và một số tính chất của chúng. Khái niệm và một số tính chất của đa thức Bernoulli cũng đã được trình bày trong Luận văn thạc sĩ của Nguyễn Ngọc Thiêm [1]. Ở đây, chúng tôi sẽ trình bày lại khái niệm của đa Bernoulli và trình bày các tính chất khác của nó. Với các tính chất đã được trình bày trong luận văn của Nguyễn Ngọc Thiêm chúng tôi sẽ chỉ trích dẫn những kết quả thực sự cần sử dụng trong luận văn này.

1.1 Đa thức Bernoulli và số Bernoulli

Định nghĩa 1.1.1. *Đa thức Bernoulli* thứ n, kí hiệu $B_n(x)$, được định nghĩa bởi $B_0(x) = 1$ và

$$B_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{te^{xt}}{e^t - 1}\Big|_{t=0}, \text{ với } n = 1, 2, 3, ...,$$

trong đó $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$ là kí hiệu đạo hàm riêng thứ n theo biến t.

Từ định nghĩa của đa thức Bernoulli ta thấy rằng nếu khai triển

Taylor hàm số $\frac{te^{xt}}{e^t-1}$ tại $t=0$ thì ta có

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Bằng tính toán đơn giản ta có thể liệt kê một số đa thức Bernoulli đầu tiên như sau:

$$\begin{aligned}
&B_0(x)=1,\\
&B_1(x)=x-\frac{1}{2},\\
&B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\\
&B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\
&B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\\
&B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\dots
\end{aligned}$$

Dưới đây là một số tính chất của đa thức Bernoulli đã được trình bày trong luận văn của Nguyễn Ngọc Thiêm nên chúng tôi bỏ qua chứng minh của chúng.

Mệnh đề 1.1.2 ([1, Định lý 2.2.1]). *Với* $n\geq 1$*, ta có*

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x).$$

Mệnh đề 1.1.3 ([1, Định lý 2.2.2]). *Với* $n\geq 0$*, ta có*

$$B_n(x+1)=B_n(x)+nx^{n-1}.$$

Thực tế, người ta còn chứng minh được khẳng định mạnh hơn rằng: một đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x+1)-f(x)=nx^{n-1}$ khi và chỉ khi $f(x)=B_n(x)+c$, với c là một hằng số [3, Công thức (5)].

Mệnh đề 1.1.4 ([1, Định lý 2.2.6])**.** *Với* $n \geq 0$*, ta có*

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$

Định nghĩa 1.1.5. Giá trị của đa thức Bernoulli thứ n tại $x = 0$ được gọi là *số Bernoulli* thứ n, kí hiệu B_n, tức là

$$B_n = B_n(0).$$

Từ định nghĩa ta có ngay $B_0 = 1, B_1 = -\dfrac{1}{2}, B_2 = \dfrac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\dfrac{1}{30}, B_5 = 0$. Hơn nữa ta còn có mệnh đề sau khẳng định giá trị của các số Bernoulli thứ lẻ lớn hơn 1 đều bằng không.

Mệnh đề 1.1.6 ([1, Định lý 1.2.4])**.** *Với* $k \geq 1$*, ta có*

$$B_{2k+1} = 0.$$

Định lý von Staudt– Clausen dưới đây cho ta biết về giá trị của các số Bernoulli thứ chẵn.

Định lý 1.1.7 (Định lý von Staudt–Clausen)**.** *Với* $n \geq 1$*, ta có*

$$B_{2n} = G_{2n} - \sum_{p-1|2n, p \text{ nguyên tố}} \frac{1}{p},$$

trong đó G_{2n} *là một số nguyên và tổng ở vế phải chạy trên tất cả các số nguyên tố* p *(bao gồm cả 2) thỏa mãn* $p-1$ *là ước của* $2n$*.*

Trước khi trình bày chứng minh, ta có thể minh họa công thức nêu trong Định lý qua một số số Bernoulli đầu tiên:

$$B_2 = \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$